21 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$ (C)

1° $D_f =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x - 2}{(x^2-1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

2° **a)** $y = 1$ est l'équation de l'asymptote horizontale . $\dfrac{x^2+2x}{x^2-1} = 1$ pour $x = -\dfrac{1}{2}$;

$A\left(-\dfrac{1}{2}\,;1\right)$ est le point d'intersection de (C) avec son asymptote horizontale .

b) $f(3) = \dfrac{15}{8}$

3° $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{15}{8}$

$f(x) = 0$ pour $x = -2$ ou $x = 0$

$f(x) = \dfrac{15}{8}$ pour $x = -\dfrac{5}{7}$ ou $x = 3$

$0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{15}{8}$ pour $x \leqslant -2$ ou $-\dfrac{5}{7} \leqslant x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 3$.

28 **A.**

1° $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2° La fonction f telle que $f(x) = x - 20 + \dfrac{400}{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est

$f'(x) = 1 - \dfrac{400}{x^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{x^2 - 400}{x^2}$.

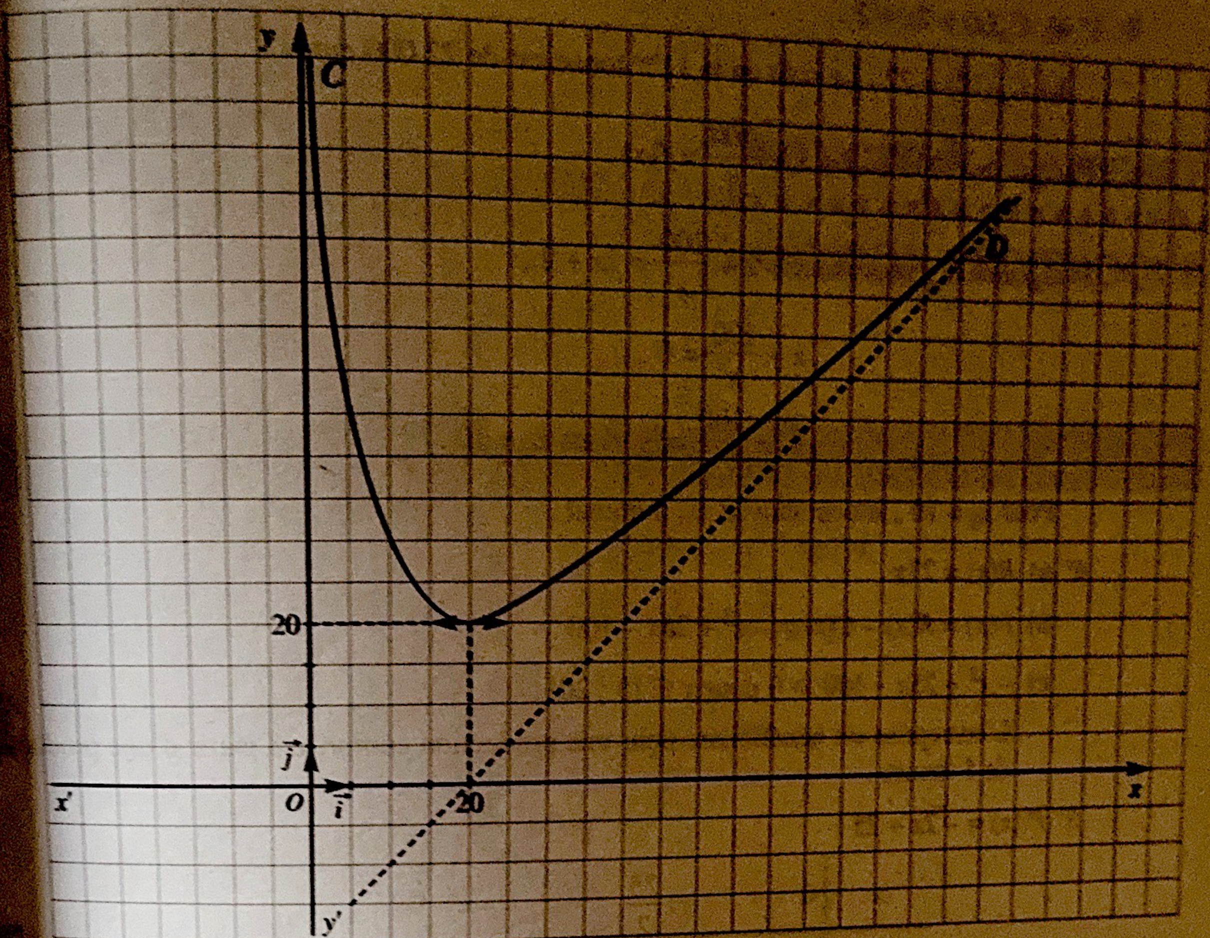
Tableau de variation :

x	0		20		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	20	$\nearrow$	$+\infty$

3° **a)** $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (x - 20)\right] = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{400}{x} = 0$. La droite d'équation $y = x - 20$ est donc une asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Comme $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des y) est l'asymptote verticale à (C) .

c)



B. 1° $C_M(x) = \dfrac{x^2 - 20x + 400}{x} = x - 20 + \dfrac{400}{x} = f(x)$

D'après l'étude précédente, il faut fabriquer 20 objets pour avoir des charges moyennes unitaires minimales .

2° Le profit est $P(x) = 10x - C(x) = -x^2 + 30x - 400$.

La fonction P atteint son maximum (car $a = -1 < 0$) pour la valeur x telle que $P'(x) = 0$ donc $-2x + 30 = 0$, soit pour $x = 15$.